隸屬函數(membership function)是模糊集合理論之基礎，它將一個元素是否屬於一個集合描述為介於 0 與 1 之間的程度問題，愈接近 1，則隸屬之程度愈高。模糊數學規劃即將此種模糊概念，透過隸屬函數反映於目標函數或限制式中。

10-3 模糊數學規劃之型態

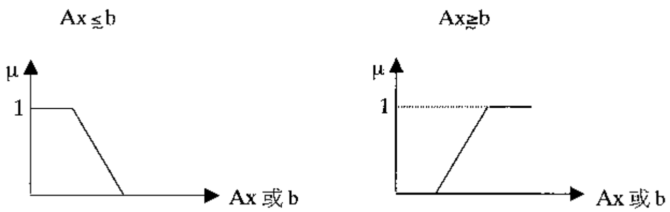
模糊數學規劃之間隸屬函數訂定，可由下面之模型加以說明：

$$\max \quad Z=\tilde{c}x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \lesssim b$$

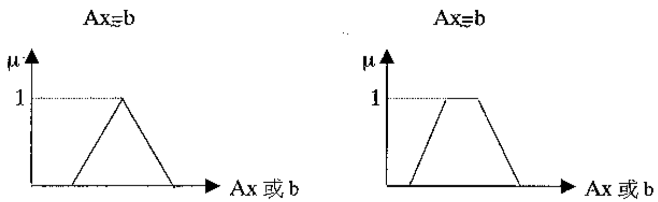
$$\tilde{x} \geq 0$$

在上述模型中，若限制式為模糊限制式 $Ax \lesssim b$ 之型態，其含意為該限制式被滿足之程度，可假設此模糊限制式之隸屬函數(perference-based membership functions)為非遞增函數(non-increasing functions)，同理，若限制式為 $Ax \gtrsim b$ 之型態，則可假設此模糊限制式之隸屬函數為非遞減函數(non-decreasing functions)。各種可能之線性隸屬函數如圖 10.1 所示。若為等式限制式，則為三角或梯形隸屬函數(triangular or trapezoidal functions)。如圖 10.2 所示，此時可以看成是一個非遞增隸屬函數與非遞減隸屬函數之交集。在最大化問題中，具模糊性之目標函數被假設為非遞減隸屬函數，反之，在最小化問題中，則具模糊性之目標函數可被假設為非遞增函數。如圖 10.3 所示。當然，在有些問題中，也許非線性之隸屬函數更能表達思維之彈性，不過在計算求解時會帶來較大的負擔。



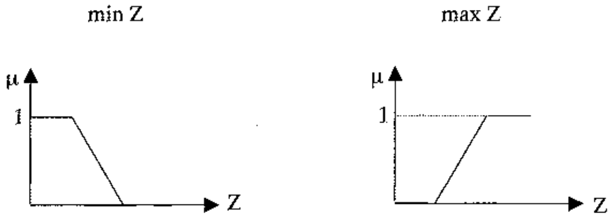
(a)非遞增函數　　(b)非遞減函數

圖 10.1：對應於不等限制式之模糊隸屬函數型態



(a)三角形隸屬函數　　(b)梯形隸屬函數

圖 10.2：對等號限制式之模糊隸屬函數型態



(a) 非遞增函數　　(b) 非遞減函數

圖 10.3：對極大化或極小化目標之模糊隸屬函數型態

10-4 模糊線性規劃

模糊線性規劃(fuzzy linear programming，FLP)即強調所有隸屬函數均為線性，在一般建模時，若線性規劃中限制式出現有模糊資源之情形，則可表達如下：

$$\max \quad cx$$

$$\text{s.t.} \quad (Ax)_i \lesssim b_i \qquad \forall i$$

$$x \geq 0$$

其中 b_i 是在模糊區間 $[b_i，b_i+P_i]$。

P_i 為已知的忍恕值(tolerance)，其隸屬函數圖 10.4 所示：

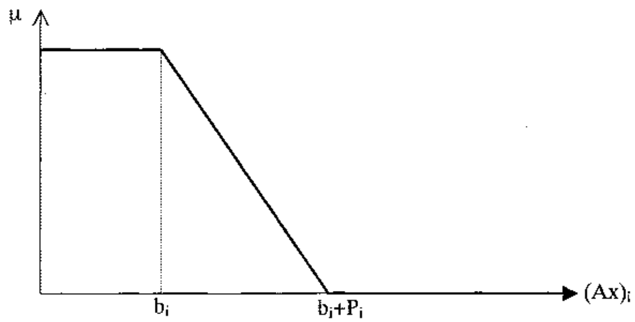


圖 10.4：模糊限制式之隸屬函數圖

一般而言，若僅考慮目標或限制式具模糊特性，則稱此模型為非對稱型模糊數學規劃，若目標函數及限制式均同時具模糊性，則稱為對稱型模糊數學規劃，在實例應用時經常做以下之假設：

(1) 線性隸屬函數(linear membership function)

(2) 在對稱型模糊數學規劃，利用最小值最大化運算子(max-min operator)進行模糊集合決策分析(即採用以下所討論之第三種方法)。如下圖 10.5 所示。

行模糊集合決策分析(即採用以下所討論之第三種方法)。如下圖 10.5 所示。

$$\mu_D(x)=\mu_G\cap\mu_C$$
$$=\max[\min\{\mu_G,\ \mu_C\}]$$

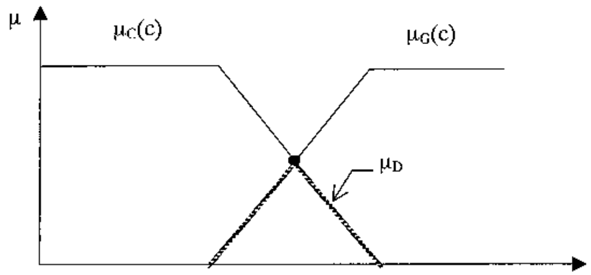


圖 10.5：最小滿意度最大化運算子

其中 μ_G 代表極大化目標之隸屬函數，μ_C 代表“≤”型態限制式之隸屬函數。在文獻中亦有其他型態之運算子，但應用不很廣泛。

以下將分別討論文獻中常見之四種方法。

(1) Verdegay 法：

此法強調非對稱模式(a nonsymmetric model)，僅考慮限制式之模糊性，其模糊限制式之隸屬函數可訂定如下(如圖 10.4)：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & 若(Ax)_i<b_i\\ 1-\dfrac{(Ax)_i-b_i}{P_i} & 若b_i\le(Ax)_i\le b_i+P_i\\ 0 & 若(Ax)_i>b_i+P_i\end{cases}$$

因此，模式可以轉換為參數規劃(parametric programming)，若 $\mu(x)=\alpha$，其 α–截集(α–cut)之表達式如下：

$$\begin{aligned}&\max\quad cx\\ &\text{s.t.}\quad (Ax)_i\le b_i+(1-\alpha)P_i\qquad\forall i\\ &\qquad\ x\ge 0\\ &\qquad\ \alpha\in[0,1]\end{aligned}$$

例題 10-1：

考慮以下之模式：

$$\begin{aligned}&\max\quad 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4\\ &\text{s.t.}\quad g_1(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\le 15\end{aligned}$$

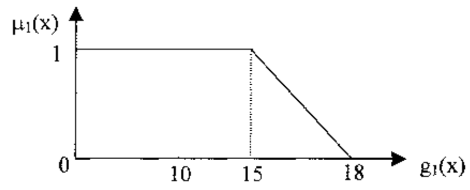
$$g_2(x)=7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\le 120$$
$$g_3(x)=3x_1+5x_2+10x_3+15x_4\le 100$$
$$x_i\ge 0\quad\forall i$$

若第 1 及第 3 限制式右側值為模糊資源，其隸屬函數訂定如下：

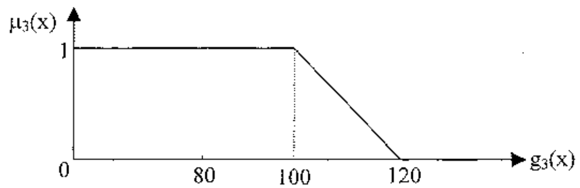
$$\mu_1(x)=\begin{cases}1 & 若g_1(x)<15\\ 1-\dfrac{[g_1(x)-15]}{3} & 若15\le g_1(x)\le 18\\ 0 & 若g_1(x)>18\end{cases}$$

$$\mu_3(x)=\begin{cases}1 & 若g_3(x)<100\\ 1-\dfrac{[g_3(x)-15]}{20} & 若100\le g_3(x)\le 120\\ 0 & 若g_3(x)>120\end{cases}$$

其隸屬函數圖如圖 10.6(a)與(b)：



(a)



(b)

圖 10.6：例題 10-1 之隸屬函數

試以模糊數學規劃解之？

解：

可將數學模型轉換如下：

$$\begin{aligned}&\max\quad 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4\\ &\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4\le 15+3(1-\alpha)\\ &\qquad\ 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\le 120\end{aligned}$$

$$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leq 100+20(1-\alpha)$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

令 $1-\alpha=\theta$，則可以用線性規劃中之參數規劃(parametric programming)來求解。

表 10.1：例題 10-1 之參數規劃表

		資源實際之使用量		
θ	Z*	資源(1)	資源(2)	資源(3)
0.0	99.29	15.00	73.57	100.00
0.1	101.28	15.30	75.04	102.00
0.2	103.27	15.60	76.51	104.00
0.3	105.26	15.90	77.98	106.00
0.4	107.25	16.20	79.45	108.00
0.5	109.24	16.50	80.92	110.00
0.6	111.23	16.80	82.93	112.00
0.7	113.22	17.10	83.86	114.00
0.8	115.21	17.40	85.33	116.00
0.9	117.20	17.70	86.80	118.00
1.0	119.19	18.00	88.27	120.00

Werner

(2) Wemer 法：

此法爲一非對稱模式(a nonsymmetric model)，Werner 認爲因爲總資源具有模糊性(fuzzy total resourcse)或不等式限制式具有模糊性，Werner 因此認爲目標函數受到限制式之模糊特性之影響，應該僅具有間接之模糊特性。因此可先探討限制是之忍恕值對目標函數值之影響，再據以定出目標函數之隸屬函數，再利用最小値最大化運算子以α−截概念連結目標函數和限制式之決策空間求解。若其原模型架構如下：

若考慮

$$\max \quad Z_0=cx$$

$$\text{s.t.} \quad (Ax)_i \leq b_i \qquad \forall i$$

$$x \geq 0$$

若考慮模糊資源 P_i 存在限制式右側：

$$\max \quad Z_1=cx$$

$$\text{s.t.} \quad (Ax)_i \leq b_i + P_i \qquad \forall i$$

$$x \geq 0$$

因此產生模糊目標，其隸屬函數爲：

第十一章 灰色規劃

11-1 前言

灰色系統理論由鄧聚龍教授於 1984 年在中國發表，他將所有系統區分成三類，即白色、灰色、黑色三部分，其中白色部分代表完全確定和清楚訊息，黑色部分代表完全未知之特性，而灰色部分得到之訊息介於二者之間。灰色系統理論強調以少量之灰訊息即可建模，並可在各種決策及預測過程中擔任篩選優化方案信賴區間之工具。

灰色系統之灰數 $(a)^{\pm}$ 表示法，是由一個開放之上下限 $((a)^{-}, (a)^{+})$ 區間表示。即

$$a^{\pm}=[(a)^{-}, (a)^{+}]=\left\{t \in x \,\middle|\, (x)^{-} \leq t \leq (x)^{+}\right\}$$

因此，任何一個含有灰數之系統即可定義爲灰色系統。灰色決策即爲在灰色系統中所進行之決策分析。灰色規劃(grey mathematical programming)即系統參數爲灰數情況下之數學規劃。

11-2 灰色系統理論之基本概念

任何一種新系統之建立，必先定義出各種運算子，灰數之運算規定如下：

(1) 若 $x^{\pm}$ 及 $y^{\pm}$ 爲二任意灰數，則灰運算可定義如下：

$$(x)^{\pm}+(y)^{\pm}=[(x)^{-}+(y)^{-}, (x)^{+}+(y)^{+}]$$

$$(x)^{\pm}-(y)^{\pm}=[(x)^{-}-(y)^{+}, (x)^{+}-(y)^{-}]$$

$$(x)^{\pm}(y)^{\pm}=[\min\{x\,y\}, \max\{x\,y\}]$$

$$(x)^{\pm}\div(y)^{\pm}=[\min\{x\div y\}, \max\{x\div y\}]$$

$$c\,(x)^{\pm}=[c(x)^{+}, c(x)^{-}] \qquad C<0$$

$$(x)^{\pm r}=[c(x)^{+r}, c(x)^{-r}] \qquad r<n$$

(2) 若對一灰數 $(x)^{\pm}$：

$(x)^{\pm} \geq 0$；iff $(x)^{-} \geq 0$ and $(x)^{-} \geq 0$

$(x)^{\pm} \leq 0$；iff $(x)^{-} \leq 0$ and $(x)^{-} \leq 0$

(3) 若有灰數 $(x)^{\pm}=[(x)^{-}, (x)^{+}]$ 和 $(y)^{\pm}=[(y)^{-}, (y)^{+}]$：

$(x)^{\pm} \leq (y)^{\pm}$；iff $(x)^{-} \leq (y)^{-}$ and $(x)^{+} \leq (y)^{+}$

$(x)^{\pm} < (y)^{\pm}$；iff $(x)^{\pm} \leq (y)^{\pm}$ and $(x)^{\pm} \neq (y)^{\pm}$

(4) 若對一灰數 $(x)^{\pm}=[(x)^{-}, (x)^{+}]$ 可定義其白化中值(whitened midvalue，

WMV) $m(x)^{\pm}$和灰寬度 $w(x)^{\pm}$爲

$$m(x)^{\pm}=[(x)^{-},(x)^{+}]/2$$

$$w(x)^{\pm}=[(x)^{+},(x)^{-}]$$

(5) 爲了評估灰區間之寬度，可定義灰度(grey degree)如下：

$$G=\frac{(x)^{+}-(x)^{-}}{m(x)}$$

(6) 灰數之符號可規定如下：

$$\mathrm{sign}[(x)^{\pm}]=1 \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}\geq 0$$

$$\mathrm{sign}[(x)^{\pm}]=-1 \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}<0$$

(7) 灰絕對值$(|x|)^{\pm}$可定義爲：

$$(|x|)^{\pm}=x^{\pm} \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}\geq 0$$

$$(|x|)^{\pm}=-x^{\pm} \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}<0$$

因此：

$$(|x|)^{-}=(x)^{-} \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}\geq 0$$

$$(|x|)^{-}=-(x)^{+} \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}<0$$

$$(|x|)^{+}=(x)^{+} \qquad \text{if}\,(x)^{\pm}\geq 0$$

$$(|x|)^{+}=-(x)^{-} \qquad \text{if}\,(x)\pm<0$$

(8) 有灰數之向量或矩陣表達，可定義如下：

$$(x)^{\pm}=\{(x_i)^{\pm}=[(x_i)^{-},(x_i)^{+}]\,|\,\forall i\} \quad (x)^{\pm}\in(R)^{\pm 1\times n}$$

$$(x)^{\pm}=\{(x_{ij})^{\pm}=[(x_{ij})^{-},(x_{ij})^{+}]\,|\,\forall i,j\} \quad (x)^{\pm}\in(R)^{\pm m\times n}$$

$$(x)^{\pm}\geq 0\text{，}\ \text{iff}\,(x_{ij})^{\pm}\geq 0,\forall i,j \quad (x)^{\pm}\in(R)^{\pm m\times n};\ m\geq 1$$

$$(x)^{\pm}\leq 0\text{，}\ \text{iff}\,(x_{ij})^{\pm}\geq 0,\forall i,j \quad (x)^{\pm}\in(R)^{\pm m\times n};\ m\geq 1$$

11-3 灰色線性規劃

灰色線性規劃(grey linear programming，GLP)中各參數可表達爲灰數，此灰訊息由建模之初即納入模式中，一直傳達到最佳解內。建模與求解之方法分別討論如下：

考慮一線性規劃模型：

$$\max \quad f^{\pm}=(C^{T})^{\pm}(X)^{\pm}$$

$$\text{s.t.} \quad (A)^{\pm}(X)^{\pm}\leq(B)^{\pm}$$

$$(X_j)^{\pm}\geq 0$$

$$(X_j)^{\pm}\in(X)^{\pm} \quad \forall j$$

其中 $(C^{T})^{\pm}=[(C_1)^{\pm},(C_2)^{\pm},\ldots\ldots,(C_n)^{\pm}]$

$$(X^{T})^{\pm}=[(X_1)^{\pm},(X_2)^{+},\ldots\ldots,(X_n)^{\pm}]$$

$$(B)^{\pm}=(b_1)^{\pm},(b_2)^{\pm},\ldots\ldots,(b_n)^{\pm}]$$

$$(A)^{\pm}=[(a_{ij})^{\pm}],\forall i,j$$

而灰色數 $(c_j)^{\pm}$，$(a_{ij})^{\pm}$，和$(b_i)^{\pm}$分別爲：

$$(c_j)^{\pm}=[(c_j)^{-},(c_j)^{+}]$$

$$(a_{ij})^{\pm}=[(a_{ij})^{-},(a_{ij})^{+}]$$

$$(b_i)^{\pm}=[(b_i)^{-},(b_i)^{+}]$$

優化解

$$(f^*)^{\pm}=[(f^*)^{-},(f^*)^{+}]$$

$$(x^*)^{\pm}=[(x_1^*)^{\pm},(x_2^*)^{\pm},\ldots\ldots,(x_n^*)^{\pm}]$$

$$(x_j^*)^{\pm}=[(x_j^*)^{-},(x_j^*)^{+}]\text{，}\ \forall j$$

灰色線性規劃是灰色規劃之基礎，其解法必須包括兩個子模式，若在目標函數中有 n 個灰色係數$(c_j)^{\pm}$$(j=1,2,\ldots\ldots,n)$，若其中之 k_1 個是正數，k_2 個是負數，且 $k_1+k_2=n$，因此，灰色最佳解可由解下列兩個子模式得到：

子模型 I：

$$\max \quad f^{+}=(c_1)^{+}(x_1)^{+}+\ldots\ldots+(c_k)^{+}(x_k)^{+}$$
$$+(c_{k+1})^{+}(x_{k+1})^{-}+\ldots\ldots+(c_n)^{+}(x_n)^{-}$$

$$\text{s.t.} \quad (a_{i1})^{-}(x_1)^{+}+\ldots\ldots+(a_{ik})^{-}(x_k)^{+}$$
$$+(a_{ik+1})^{+}(x_{k+1})^{-}+\ldots\ldots+(a_{in})^{+}(x_n)^{-}\leq(b_i)^{+}$$

其中 $(x_1)^{+},\ldots\ldots,(x_k)^{+}\geq 0$

$$(x_{k+1})^{-},\ldots\ldots,(x_n)^{-}\geq 0$$

$$(c_1)^{+},(c_2)^{+},\ldots\ldots,(c_k)^{+}\geq 0$$

$$(c_{k+1})^{-},(c_{k+2})^{-},\ldots\ldots,(c_n)^{-}\leq 0$$

子模型 II：

$$\max \quad f^{-}=(c_1)^{-}(x_1)^{-}+\ldots\ldots+(c_k)^{-}(x_k)^{-}$$

$$+(c_{k+1})^-(x_{k+1})^+ + \dots\dots + (c_n)^-(x_n)^+$$

$$\text{s.t.} \quad (a_{i1})^+(x_1)^- + \dots\dots + (a_{ik})^+(x_k)^-$$

$$+(a_{ik+1})^-(x_{k+1})^+ + \dots\dots + (a_{in})^-(x_n)^+ \le (b_i)^-$$

其中 $(x_1)^-,\dots\dots,(x_k)^- \ge 0$

$(x_{k+1})^+,\dots\dots,(x_n)^+ \ge 0$

$(c_1)^-,(c_2)^-,\dots\dots,(c_k)^- \ge 0$

$(c_{k+1})^-,(c_{k+2})^-,\dots\dots,(c_n)^- \le 0$

也正因為在子模型 I 環境中，挑選帶正值之 $(c_k)^+$ 搭配 $(x_k)^+$ 以及挑選帶負值之 $(c_n)^-$ 搭配 $(x_n)^-$，使得限制式在 $(b_i)^+$ 之設定下，可以配合 $(a_{ik})^-$ 及 $(a_{in})^+$ 而逼出 $(x_k)^+$ 及 $(x_n)^-$，同理可得子模型 II 之功能，並完成最佳化灰解(灰優化解)之合成。

因此由子模型 I 與 II 可得到：

$$f^{\pm} = [f^-, f^+]$$

$$x^{\pm} = [x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}]$$

其中

$$x_1^{\pm} = [x_1^-, x_1^+]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{\pm} = [x_n^-, x_n^+]$$

灰色線性規劃之精髓在於將輸入資料之灰訊息經過優化之過程直接傳入灰色最佳解中，因此不需要敏感度分析。然而在求取灰色線性規劃之優化解過程中，可得到各灰數上下限之敏感度，因此可以看出何種灰訊息是否需要強化之趨勢；綜合而言，以上之方法提供了灰決策過程中一種有效之篩選工具。

例題 11-1：

在一假設區域性廢棄物管理系統中，有三座城市共用一座垃圾焚化爐處理設施及一座垃圾掩埋場，如圖 11.1 所示。若需對該系統進行長期之系統管理規劃，時間包含 15 年，分為三個時程，每時程包含 5 年。已知掩埋場的總容量是 $5.0(10^6)$ 至 $5.2(10^6)$ 噸，焚化廠的容量是 500 至 600 噸/天，假設灰渣產量是垃圾進料的 30%，發電效益是每燃燒 1 噸垃圾有 15 至 25 元收益。表 11.1 則詳列了三段時程中，三座城市的垃圾產量、兩座處理及處置設施的操作費及運送費。

此系統中必須要完成的規劃是如何在系統總成本最小化的前提下，有效率的分配垃圾流佈，在單目標規劃中可以考慮以系統總成本最小化為目標，在後續之多目標規劃中，可以加入焚化廠利用率最大化的目標，加入的原因是為了使焚化爐垃圾進料量維持在某一定量，以確保焚化爐正常並延長掩埋場使用年限。

例題 11-2：

在一個懸浮微粒(TSP)之總量管制計畫中，欲對三個排放源進行排放量削減，此項工作有助於課徵污染稅之評估及排放許可證之核發，這三個工廠之污染控制方案、效率及成本資訊已調查如下：電廠 I 和 II 每年要燒 400,000 和 300,000 噸之煤，而水泥廠每年生產 250,000 噸之水泥，每燒一噸之煤會排放 95kg 之 TSP，而每生產 1 噸之水泥會排放 85kg 之 TSP，環保單位已要求減少 80%之總排放量。排放量之控制方案，去除率及成本訊息如表 11.2。

表 11.2：例題 11-2 之背景資料表

控制方案	去除效率(%)	成　本　($/噸)		
		電廠 I	電廠 II	水泥廠
1.旋風集塵器	59	1.0	1.4	1.1
2.靜電集塵器	94	2.0	2.2	3.0
3.濾袋集塵器	99	2.8	3.0	3.0

請回答下列問題：

(1) 試以線性規劃建立優選模型，使污染防治成本最小化？

(2) 若系統之灰參數訊息如表 11.3，總量管制目標定為 80%~82%，試以灰色線性規劃來建模，並說明如何求解？

表 11.3：例題 11-2 之灰色規劃背景資料

控制方案	去除效率(%)	成　本　($/噸)		
		電廠 I	電廠 II	水泥廠
1.旋風集塵器	55~65	1.0~1.1	1.4~1.5	1.1~1.3
2.靜電集塵器	93~97	2.0~2.1	2.2~2.5	3.0~3.1
3.濾袋集塵器	98~99	2.8~2.9	2.9~3.0	3.0~3.1

解：

(I) 如果假設各種控制方案可以混合使用，則為 LP 之問題，

設 x_{ij} = 第 i 個廠執行第 j 個污染控制計畫狀況下所能燒的煤或生產之水泥量(噸/年)，i = (1，2，3)，j = (0，1，2，3)

排放源 1：(400,000)(噸/年)(95)(公斤/噸) = 38,000,000(公斤/年)

排放源 2：(300,000)(噸/年)(95)(公斤/噸) = 28,500,000(公斤/年)

排放源 3：(250,000)(噸/年)(85)(公斤/噸) = 21,500,000(公斤/年)

總排放量：　　　　　　　　87,750,000(公斤/年)

根據 80%的排放削減計畫，最大允許排放量是 17,600,000(公斤/年)。

・目標函數

min　年成本 = Z

$Z=1.0x_{11}+2.0x_{12}+2.8x_{13}$

$+1.4x_{21}+2.2x_{22}+3.0x_{23}$

$+1.1x_{31}+3.0x_{32}+3.0x_{33}$

・限制式：

(1)排放削減量：

$95x_{10}+(95)(0.59)x_{11}+(95)(0.94)x_{12}+(95)(0.99)x_{13}$

$+95x_{20}+(95)(0.59)x_{21}+(95)(0.94)x_{22}+(95)(0.99)x_{23}$

$+95x_{30}+(95)(0.59)x_{31}+(95)(0.94)x_{32}+(95)(0.99)x_{33}$

$\geq 70{,}160{,}000$

(2)質量平衡：

$x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}=400{,}000$

$x_{20}+x_{21}+x_{22}+x_{23}=300{,}000$

$x_{30}+x_{31}+x_{32}+x_{33}=250{,}000$

非負限制式：

$x_{ij}\geq 0$ ， $\forall i,j$

(2) 若以 GLP 之方法考慮可以混合使用方案之情況：

$$\min \quad f^{\pm}=(C^T)^{\pm}(x_{ij})^{\pm}$$

s.t.

$$(A)^{\pm}(x_{ij})^{\pm}\geq(B)^{\pm}$$

$$\sum(x_{ij})^{\pm}=(P)^{\pm}$$

$$(x_{ij})^{\pm}\geq 0，(x_{ij})^{\pm}\in(X)^{\pm}，\forall i,j$$

其中 $(C^T)^{\pm}=[(c_1)^{\pm},(c_2)^{\pm},(c_3)^{\pm},......,(c_9)^{\pm}]$

$(X^T)^{\pm}=[(x_{11})^{\pm},(x_{12})^{\pm},(x_{13})^{\pm},(x_{21})^{\pm},(x_{22})^{\pm},(x_{23})^{\pm},(x_{31})^{\pm},\otimes(x_{32})^{\pm},(x_{33})^{\pm}]$

$(A)^{\pm}=[(a_{11})^{\pm},(a_{12})^{\pm},(a_{13})^{\pm},(a_{21})^{\pm},(a_{22})^{\pm},(a_{23})^{\pm},(a_{31})^{\pm},(a_{32})^{\pm},(a_{33})^{\pm}]$

已知灰數：

$(c_i)^{\pm}$： $(c_1)^{\pm}=[1.0,1.1]$，$(c_2)^{\pm}=[2.0,2.1]$，$(c_3)^{\pm}=[2.8,2.9]$

$(c_4)^{\pm}=[1.4,1.5]$，$(c_5)^{\pm}=[2.2,2.5]$，$(c_6)^{\pm}=[2.9,3.0]$

$(c_7)^{\pm}=[1.1,1.3]$，$(c_8)^{\pm}=[3.0,3.1]$，$(c_9)^{\pm}=[3.0,3.1]$

$(a_{11})^{\pm}=[0.55,0.65]$，$(a_{12})^{\pm}=[0.93,0.97]$，$(a_{13})^{\pm}=[0.98,0.99]$

$(a_{ij})^{\pm}$：$(a_{14})^{\pm}=[0.55,0.65]$，$(a_{15})^{\pm}=[0.93,0.97]$，$(a_{16})^{\pm}=[0.98,0.99]$

$(a_{17})^{\pm}=[0.55,0.65]$，$(a_{18})^{\pm}=[0.93,0.97]$，$(a_{19})^{\pm}=[0.68,0.99]$

且 $(B)^{\pm}=[(7.016)(10^7)，(7.191)(10^7)]$

$$(P)^{\pm}=\begin{bmatrix}(3.8)(10^5),\ (4.0)(10^5)\\(2.8)(10^5),\ (3.0)(10^5)\\(2.3)(10^5),\ (2.5)(10^5)\end{bmatrix}$$

解題程序如下：

<u>子模型 I</u>：

$$\min \quad f^{+}=1.1(x_{11})^{+}+2.1(x_{12})^{\pm}+2.9(x_{13})^{+}+1.5(x_{21})^{+}+2.5(x_{22})^{+}$$
$$+3.0(x_{23})^{+}+1.3(x_{31})^{+}+3.1(x_{32})^{+}+3.1(x_{33})^{+}$$

s.t.

$$0.55(x_{11})^{+}+0.93(x_{12})^{+}+0.98(x_{13})^{+}$$
$$+0.55(x_{21})^{+}+0.93(x_{22})^{+}+0.98(x_{23})^{+}$$
$$+0.55(x_{31})^{+}+0.93(x_{32})^{+}+0.98(x_{33})^{+}$$
$$\geq 7.191\times 10^7$$
$$(x_{11})^{+}+(x_{12})^{+}+(x_{13})^{+}+(x_{14})^{+}=4.0\times 10^5$$
$$(x_{21})^{-}+(x_{22})^{+}+(x_{23})^{+}+(x_{24})^{+}=3.0\times 10^5$$
$$(x_{31})^{+}+(x_{32})^{+}+(x_{33})^{+}+(x_{34})^{+}=2.5\times 10^5$$

<u>子模型 II</u>：

$$\min \quad f^{-}=(x_{11})^{-}+2.0(x_{12})^{-}+2.8(x_{13})^{-}+1.4(x_{21})^{-}+2.2(x_{22})^{-}$$
$$+3.0(x_{23})^{-}+1.1(x_{31})^{-}+3.0(x_{32})^{-}+3.0(x_{33})^{-}$$

s.t.

$$0.65(x_{11})^{-}+0.97(x_{12})^{-}+0.99(x_{13})^{-}$$
$$+0.65(x_{21})^{-}+0.97(x_{22})^{-}+0.99(x_{23})^{-}$$
$$+0.65(x_{31})^{-}+0.97(x_{32})^{-}+0.99(x_{33})^{-}$$
$$\geq 7.016\times 10^7$$
$$(x_{11})^{-}+(x_{12})^{-}+(x_{13})^{-}+(x_{14})^{-}=(3.8)(10^5)$$
$$(x_{21})^{-}+(x_{22})^{-}+(x_{23})^{-}+(x_{24})^{-}=(2.8)(10^5)$$
$$(x_{31})^{-}+(x_{32})^{-}+(x_{33})^{-}+(x_{34})^{-}=(2.2)(10^5)$$

解出這兩個模型後，得到合成之灰解：

$$f^{\pm}=[f^{-},f^{+}]$$

$$(x)^{\pm}=[(x_{ij})^{\pm}]$$

$$(x_{ij})^{\pm}=[(x_{ij})^{-}，(x_{ij})^{+}]$$

今採用合併二個子模型之方式求解如下：

子模型 I：

min $1.1x_{111}+2.1x_{112}+2.9x_{113}+1.5x_{121}+2.5x_{122}+3.0x_{123}+1.3x_{131}+3.1x_{132}+3.1x_{133}$

s.t. $52.25x_{111}+88.35x_{112}+93.1x_{113}+52.25x_{121}+88.35x_{122}+93.1x_{123}+46.75x_{131}+$

$79.05x_{132}+83.3x_{133}\geq 71910000$

$x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{114}=400000$

$x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{124}=300000$

$x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{134}=250000$

子模型 II：

min $1.0x_{211}+2.0x_{212}+2.8x_{213}+1.4x_{221}+2.2x_{222}+2.9x_{223}+1.1x_{231}+3.0x_{232}+3.0x_{233}$

s.t. $61.75x_{211}+92.15x_{212}+94.05x_{213}+61.75x_{221}+92.15x_{222}+94.05x_{223}+55.25x_{231}+$

$82.45x_{232}+84.15x_{233}\geq 70200000$

$x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{214}=380000$

$x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{224}=280000$

$x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{234}=230000$

合併兩子模型如下：

min $1.1x_{111}+2.1x_{112}+2.9x_{113}+1.5x_{121}+2.5x_{122}+3.0x_{123}+1.3x_{131}+3.1x_{132}+3.1x_{133}+$

$1.0x_{211}+2.0x_{212}+2.8x_{213}+1.4x_{221}+2.2x_{222}+2.9x_{223}+1.1x_{231}+3.0x_{232}+3.0x_{233}$

s.t. $52.25x_{111}+88.35x_{112}+93.1x_{113}+52.25x_{121}+88.35x_{122}+93.1x_{123}+46.75x_{131}+$

$79.05x_{132}+83.3x_{133}\geq 71910000$

$x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{114}=400000$

$x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{124}=300000$

$x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{134}=250000$

$61.75x_{211}+92.15x_{212}+94.05x_{213}+61.75x_{221}+92.15x_{222}+94.05x_{223}+55.25x_{231}+$

$82.45x_{232}+84.15x_{233}\geq 70200000$

$x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{214}=380000$

$x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{224}=280000$

$x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{234}=230000$

$x_{111}-x_{211}\geq 0$

$x_{112}-x_{212}\geq 0$

$x_{113}-x_{213}\geq 0$

$x_{111}-x_{221}\geq 0$

$x_{112}-x_{222}\geq 0$

$x_{113}-x_{232}\geq 0$

$x_{111}-x_{231}\geq 0$

$x_{112}-x_{232}\geq 0$

$x_{113}-x_{233}\geq 0$

$x_{114}-x_{214}\geq 0$

$x_{124}-x_{224}\geq 0$

$x_{134}-x_{234}\geq 0$

以 LINDO 解出合併後之兩個模型，其結果如下：

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 28

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3449612.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X111	65193.878906	0.000000
X112	334806.125000	0.000000
X113	0.000000	0.536842
X121	0.000000	0.000000
X122	300000.000000	0.000000
X123	0.000000	0.236842
X131	230000.000000	0.000000
X132	0.000000	0.235457
X133	20000.000000	0.000000
X211	65193.878906	0.000000
X212	314806.125000	0.000000
X213	0.000000	0.800000
X221	0.000000	0.200000
X222	280000.000000	0.000000

X223	0.000000	0.700000
X231	230000.000000	0.000000
X232	0.000000	1.675069
X233	0.000000	1.675069
X114	0.000000	0.794737
X124	0.000000	0.194737
X134	0.000000	0.190028
X214	0.000000	0.000000
X224	0.000000	0.000000
X234	0.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-0.055402
3)	0.000000	2.794737
4)	0.000000	2.394737
5)	0.000000	1.514959
6)	1344606.875000	0.000000
7)	0.000000	-2.000000
8)	0.000000	-2.200000
9)	0.000000	-1.324931
10)	0.000000	-1.000000
11)	20000.010000	0.000000
12)	0.000000	0.000000
13)	0.000000	-1.000000
14)	20000.000000	0.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	0.000000	-0.224931
17)	0.000000	0.000000
18)	20000.000000	0.000000
19)	0.000000	-2.000000
20)	0.000000	-2.200000
21)	0.000000	-1.324931

NO.ITERATIONS= 28

其灰解如下：

$f^{\pm}=[f^{-}，f^{+}]=[1563806，1885806]$

$x_{11}^{\pm}=65193.878906$；$x_{12}^{\pm}=[334806.125，314806.125]$；$x_{13}^{\pm}=0$；$x_{14}^{\pm}=0$；